МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии

_______*Семёнов Е.М.*
подпись, расшифровка подписи
11.04.2022 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.02.01 Ортогональные ряды

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки/специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация (степень) выпускника: Специалист. Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

теории функций и геометрии

6. Составители программы: Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

7. Рекомендована: НМС математического факультета ВГУ, протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.

8. Учебный год: 2025/2026 уч.год **Семестр(ы):** 8

9. **Цели и задачи учебной дисциплины:**

Цели учебной дисциплины:

- ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами теории ортогональных рядов, которая занимает одно из центральных мест в анализе. Ортогональные ряды широко используются в различных разделах анализа.
- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом.

Задачи учебной дисциплины:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными навыками применения ортогональных рядов в задачах анализа;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: Дисциплины по выбору Б1.В.ДВ.02 основной образовательной программы по специальности 02.05.01 Фундаментальные математика и механика - Специалист.

Опирается на курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ» и помогает студентам решать конкретные задачи, возникающие в различных разделах дисциплины. Излагаются основные методы теории ортогональных рядов. Изучаются ортонормированные системы общего вида и важные конкретные системы, такие как системы Хаара, тригонометрическая система, система Радемахера.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики	ПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: основные стандарты, нормы и правила оформления результатов научно-исследовательских работ Уметь: оформлять результаты научно-исследовательских работ Владеть: навыками математического мышления на основе ключевых компетенций, способствующих овладению социальным опытом в сфере современного рынка
		ПК-1.2	Умеет собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты	Знать: основные понятия, определения и свойства объектов теории рядов и интегралов Фурье, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы

			исследований в области теории функций	их приложений в других областях математического знания. Уметь: оперировать с ортогональными рядами и интегралами Фурье во всех формах; выполнять преобразования Фурье Владеть: теоретическими и практическими навыками применения методов теории ортогональных рядов и интегралов Фурье в научно-исследовательской и прикладной деятельности.
		ПК-1.3	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	Знать: пути дальнейшего развития теории и методов ее решения. Уметь: разрабатывать математические модели в области математики, механики, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ Владеть: основными методами системного анализа; четким представлением о методах исследования в области прикладной математики

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (*в соответствии с учебным планом)* — 3/108.

Форма промежуточной аттестации *(зачет/экзамен)* зачет.

13. Виды учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость			
	Всего	По семестрам		
		№ семестра	№ семестра	…
Аудиторные занятия	50			
в том числе: лекции	16	8		
практические				
лабораторные	34	8		
Самостоятельная работа	58	8		
Форма промежуточной аттестации *(зачет – 36 час. / экзамен – часов.)*		8		
Итого:	108			

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела	Содержание раздела дисциплины

	дисциплины	
	1. Лекции	
1.	Пространства lp, l_∞, Co, вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах lp.
2.	Сепарабельность lp.	Доказывается, что пространство lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в lp.	Изучаются сопряженные к lp пространства.
4.	Пространства L_∞ и Lp, вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p норма элемента в пространствах lp.
5.	Сепарабельность Lp.	Доказывается, что пространство Lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.	Изучается понятие изоморфизм пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.
8.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктной системой функций дополняемо в Lp.
9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.
10.	Неравенство Хинчина (1,2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в Lp подпространство изоморфное L_2.
11.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1,2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
12.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в Lp с помощью ортогонального проектора.
13.	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2
14.	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2.
15.	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.
16.	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.
	2. Лабораторные занятия	
1.	Пространства lp, l_∞, Co, вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах lp.
2.	Сепарабельность lp.	Доказывается, что пространство lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в lp.	Изучаются сопряженные к lp пространства.
4.	Пространства L_∞ и Lp, вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p норма элемента в пространствах lp.
5.	Сепарабельность Lp.	Доказывается, что пространство Lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.	Изучается понятие изоморфизм пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.
8.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктной системой функций дополняемо в Lp.

9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.
10	Неравенство Хинчина (1,2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в Lp подпространство изоморфное L_2.
12	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1,2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.
14	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в Lp с помощью ортогонального проектора.
15	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2
16	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2.
17	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.
18	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1.	Пространства последовательностей	6	12		20	38
2.	Пространства функций	6	12		20	38
3.	Свойства рядов Радемахера	4	10		18	32
	Итого:	16	34		58	108

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, лабораторные занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях рассказывается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Ортогональные ряды» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед лабораторным занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к лабораторным занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

4. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации

(видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к зачёту по дисциплине.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины *(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)*

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	***Гуревич, Александр Петрович***. *Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов .— Москва : Лань, 2012 .— 192 с. - // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL:http://e.lanbook.com*
2	***Люстерник, Л. А.*** *Краткий курс функционального анализа [Текст] : .— Москва : Лань, 2009 .— 272 с. — // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL:http://e.lanbook.com*
3	***Дерр, Василий Яковлевич***. *Функциональный анализ. Лекции и упражнения : учебное пособие для бакалавров : [для студ. вузов, обуч. по специальности высш. проф. образования 010101 "Математика" и направления подготовки высш. проф. образования "Математика", 010200 "Математика. Прикладная математика"] / В.Я. Дерр .— Москва : Юрайт, 2012 .— 463, [1] с. — (Бакалавр) .— Библиогр.: с.460-461.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	*Источник*
4	***Кашин, Борис Сергеевич***. *Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян .— М. : Наука : Физматлит, 1984 .— 495 с.*
5	***Бари, Нина Карловна***. *Тригонометрические ряды / Н.К. Бари ; Под ред. П.Л. Ульянова .— М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961 .— 936 с.*
6	***Треногин, Владилен Александрович***. *Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с.*
7	***Колмогоров, Андрей Николаевич***. *Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)
	Google, Yandex, Rambler
	ЭБС «Университетская библиотека онлайн» ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10082

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

(учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1.	Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. – Новое изд. – М.: МЦНМО, 2017. – 336 с.: ил.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

При изучении дисциплины используются активные и интерактивные формы проведения лекций и практических занятий.

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории со специализированной мебелью, аудитории соответствуют действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

19.1. Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	Пространства последовательностей. Пространства функций. Свойства рядов Радемахера.	ПКВ- 1 Способен выявлять, применять разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и	ПКВ-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Устный опрос Индивидуальные задания

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
		механики		
		ПКВ- 2 Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПКВ-2.1. Знает современные методы разработки и реализации моделей, используя теорию функций	Устный опрос Индивидуальные задания
			ПКВ-2.2. Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования	Устный опрос Индивидуальные задания
		ПКВ- 3 Способен к построению моделей и оптимальному решению теоретических и прикладных задач математики и механики на основе методов теории функций и геометрии	ПКВ- 3.1 Знает современные методы разработки и реализации математических моделей	Устный опрос Индивидуальные задания
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет				Вопросы к зачету

19.2 Описание критериев и шкалы оценивания компетенций (результатов обучения) при промежуточной аттестации

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует одному или более чем одному из перечисленных показателей, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками.	Пороговый уровень и выше порогового	зачтено
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.		не зачтено

19.3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме *устного опроса (индивидуальный опрос).*

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний или практическое задание, позволяющее оценить степень сформированности умений и навыков.

При оценивании используются качественные шкалы оценок. Критерии оценивания приведены выше.

20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме выполнения индивидуальных работ.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

1.Пространства l_p, l_∞, c_0, вложения.
2.Сепарабельность l_p.
3.Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в l_p.
4.Пространства L_∞ и L_p, вложения.
5.Сепарабельность L_p.

6.Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.
7.Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.
8.Система Радемахера.
9.Неравенство Хинчина (1).
10.Неравенство Хинчина (2).
11.Неравенство Хинчина в пространстве Орлича.
12.Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.
13.Сходимость рядов Радемахера.
14.Расходимость рядов Радемахера.

Примерные ответы:

1. СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА

- ортонормированная на отрезке [0,1] система $\{r_k(x)\}$. Введена Х. Радемахером [1]. Функции $r_k(x)$ можно определить равенствами

$r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi x$, $x \in [0, 1]$, $k = 1, 2,$ ...

Другое определение функций Радемахера $r_k(x)$ получается путем рассмотрения двоичных разложений чисел отрезка [0,1]: если в двоичном разложении числа хна k-м месте стоит цифра 0, то полагают $r_k(x) = 1$, если же на k-м месте стоит 1, то $r_k(x) = -1$; в случае же, когда x=0 или число х допускает два разложения, полагают $r_k(x) = 0$. Согласно этому определению отрезок [0,1] распадается на 2^k равных подинтервала, в каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения +1 и -1, а на концах подинтервалов $r_k(x) = 0$

Система $\{r_k(x)\}$ представляет типичный пример стохастически независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных рядов.

Одно из важных свойств Р. с. устанавливается теоремой Радемахера: если $\sum c_k^2 < +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ сходится почти всюду на [0,1], и теоремой Хинчина-Колмогорова: если $\sum c_k^2 = +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ расходится почти всюду на [0,1].

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала [0,1] принимают лишь значения ±1, то рассмотрение ряда $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбирается распределение знаков ±1, зависящее от точки *x.* Если x=0, $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$- представление числа $x \in [0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби, то при a_n=0 перед c_n ставится знак + и при a_n=1 ставится знак - .

Вышеприведенные теоремы в терминах теории вероятностей означают, что если $\sum c_n^2 < +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ сходится для почти всех распределений знаков (сходится с вероятностью 1), и если $\sum c_n^2 = +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ расходится для почти всех распределений знаков (расходится с вероятностью 1).

Наоборот, ряд теорем теории вероятностей можно сформулировать в терминах функций Радемахера. Напр., теорема Кантелли о том, что при игре "в герб и решетку" со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю, означает, что почти всюду на [0,1] выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_k(x) = 0$$

2. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

- одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $0<\alpha\leqslant 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *Липшица условию* порядка α Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. нек-рой непрерывной функции, необходимо и: достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0)=0, \quad \omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta+\eta)\leqslant\omega(\delta)+\omega(\eta), \quad \delta, \eta>0$ Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

- конечная разность k-го порядка функции f(x), иН. м. в произвольных пространствах функций, напр, интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p\geqslant 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \quad (*)$$

Для 2π-периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку [0, 2π].